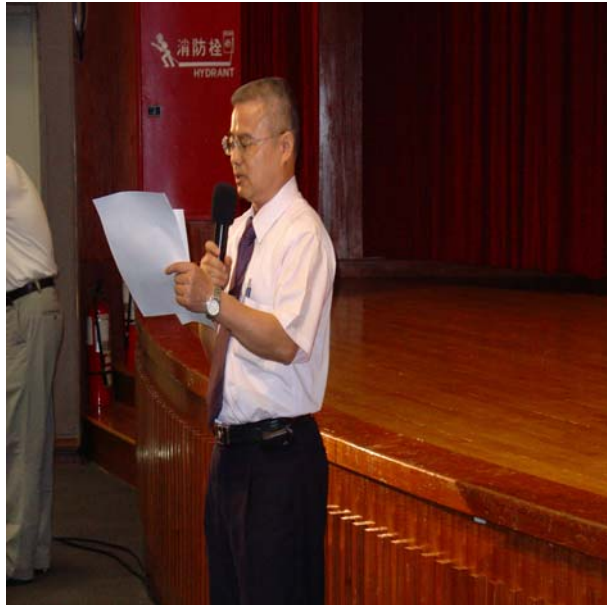


第一場 『豹紋與碎形』(2007 年9 月30 日)

國立成功大學奈米科技與微系統工程研究所 張恩旗 紀錄整理

主持人：高師大附中 蔡典謨 校長



今天看到這麼多年輕朋友、老師和各為支持本演講的觀眾，非常高興因為今天這個活動非常有意義，這個活動是由國科會來主辦，由科工館還有國立成功大學以及高雄應用科技大學聯合來承辦，這個計畫是一個科學普及化、大眾化的一個科學教育計畫，這個計畫的主持人，是我們成功大學的李旺龍教授，那這個活動是系列的活動，今天是第一場，有這麼多的年輕朋友和對於科學有興趣的社會大眾，相信各位會有非常多的收穫，歡迎大家繼續來參加，那這個活動進場都是免費的，這個是非常不容易的因為可以聽到很多大師級的演講，不只是這樣，如果進場次數夠了，可由國科會來提供科學發展月刊和精美的禮品，還有科工館的免費的一日遊，希望大家能夠利用這樣一個機會，也希望各位師長鼓勵我們學生來參加。

易的因為可以聽到很多大師級的演講，不只是這樣，如果進場次數夠了，可由國科會來提供科學發展月刊和精美的禮品，還有科工館的免費的一日遊，希望大家能夠利用這樣一個機會，也希望各位師長鼓勵我們學生來參加。

那接下來我就來為各位介紹我們今天的科學大師，中興大學的廖思善教授，廖教授是中興大學物理系的教授，他畢業於台大物理系，是美國 Johns Hopkins 大學的博士，研究的領域是非線性物理、生物物理、原子物理，他也是國內研究碎形最頂尖的學者，他複製了豹紋還登上了 nature 雜誌的頭條新聞，所以是一個國際的知名的學者，廖教授可以把非常專業的東西，用非常有趣的非常通俗的方式介紹給我們大家，相信我們可以享受到一場科學的饗宴，我也非常的期待廖教授的演講，那演講結束後有一小段的時間可以提供給各位大家來提問，所以各位同學、各位師長、各位女仕、各位先生你們在這個演講中如果有任何的疑問也可以提出來，最後可以來請教我們的廖教授，那我是不是就把這個棒子就交給我們今天的科學大師廖教授，是不是掌聲來掌聲來熱烈歡迎謝謝我們廖教授。

蔡校長、郭教務長、還有李旺龍教授、各位來賓大家好，很高興能夠到科工館來演講，高雄是我出生的地方，在十八歲雄中畢業之後才離開高雄的，說不定有很多親戚朋友在這裡，所以非常的親切，我今天的主題是豹紋與碎形，首先先測試一下大家的眼力，先收集大家的注意力，請看看在這個圖像的背後隱藏了什麼東西，背後有一個立體的圖案，這個就是一個碎形，這個不是要測試你的注意力，而測試你放鬆的能力，你要把自己放鬆，把注意力渙散掉，然後把焦距對在比較遠的地方，這時候你在很放鬆的情況下就可以看到一個立體的圖案慢慢的出現了，這個立體的圖案當然並沒有花紋，可是牠是一個立體的花豹，現在我把牠隱藏起來，你在看一次牠就在那個位置，你看得見嗎？如果你願意可以帶回去在練習，我也會把他放在網路上，這個是利用立體圖的技巧和碎形的原理製作出來

的。

今天的主題就是豹紋，一般講都是說斑點，事實上如果你注意看牠還不是真的斑點而已，牠其實是有一些點組成一個環狀組織，有時候三點、有時候四點、



有時候五點，這些紋路大家都說很漂亮。大家有沒有想過豹的斑紋是怎麼產生的，從前有很多人在想這個問題，不過通常很難想出一個道理來，這不是那麼容易的，當想不出原因的時候，最簡單的一種解釋為什麼有斑點，可能有一種或一個全能的生物就把它變出來了，所以包括豹的斑紋甚至豹本身的存在，可能都是來自這裡，這個是一種解釋，那很多人也接受了，就不需要再思考這個問題了。可是對一

個科學家來講，通常不能夠接受這麼簡單或者說是不負責任的一個講法，將其歸咎於別人把牠造就出來的，所以我們要試著去尋找什麼這個道理，豹的紋路是怎麼產生的。第二種解釋是文學家講的，我用諾貝爾文學獎吉普林的講法，他寫了一個童話書叫做「如此這般的故事」，這個童話是這樣講的花豹為什麼有斑點？他說非洲很久很久以前是黃土一片，花豹還有伊索匹亞人都是黃色的，他們平常是以長頸鹿跟班馬維生，所以他們就生活的很快樂，可是有一天，長頸鹿不見了，班馬也不見了，所以他們就跑去請教非洲最聰明的生物——狒狒，狒狒說他們跑到某某地方去了，所以他們就真的去找了，走著走著到了一個森林，然後他們就聽到長頸鹿的聲音也聞道班馬的味道，可是就是看不到他們，伊索匹亞人很聰明，他們就想原來班馬是有條文的，躲在樹林裡跟樹幹就會跟環境很一致的，所以班馬隱藏在樹幹裡我們看不見，長頸鹿也是有斑點，一塊一塊塊狀的，這個跟你光線透過樹葉照起來的光影是混在一塊，他們看不見，所以伊索匹亞人想既然白天我們看不到他們，不過我們聽的到聞的，所以我們晚上再來抓他，要抓之前要做偽裝，所以他用黑泥土把自己塗成黑色的，因此伊索匹亞人就變成黑人一直到現在，然後他說花豹你過來我也幫你偽裝一下，伊索匹亞人用他的手指頭拍打花豹，所以花豹上面就有斑點了，所以花豹上面的斑點不是三點、四點、五點是伊索匹亞人的指紋。好，這個是文學家講的，這裡頭當然還是有點科學，如果你聽到了並且聽清楚了，講到的科學是什麼？就是班馬跟長頸鹿有保護色，基本上這個概念，他躲在林子裡頭讓你看不到，所以這裡頭就有講到演化的概念。

演化論是十九世紀達爾文提出來的，這個在生物學算是最震撼、最有力量的一個理論，他把生物的整個多樣性都完全解釋了，不過我們還是要思考一下，這樣一個無所不包的理論，真的就可以解釋所有的東西嗎？包括了花豹的斑紋的產生嗎？那我們在檢視一下，我們假設班馬最早可能是白色的，根據演化論是來自於突變跟天擇，因為突變所以會長出不同的形樣子的班馬出來，在很久很久以前存在很多種班馬，環境會選擇什麼樣的紋路會存下來這叫天擇，某種原因其他非條文的班馬不適合我們這個環境，所以牠消滅了，然後這個有條文的班馬，牠們再突變到下一代去，又可能長出好幾種來，在經過環境的考驗牠們又消滅了，所以

我們最後剩下這一種我們熟悉的斑馬，基本上這就是用比較天真的看法來看演化論，不過想想看，你覺得這樣能夠完全說服你了嗎？斑馬從前真的存在過各種各樣的斑紋然後被淘汰了，最後牠嘗試一次錯誤的結果是這個存留下來，過去的某一段時間裡真的有存在過這個嗎？當然我們沒辦法證實，考古也沒辦法證據，沒有是找不到還是牠根本不存在，這我們不知道不過至少你可能有一點點懷疑，真的斑馬的條文需要演化論來解釋嗎？

它有沒有其他可能的道理就必須長成這個圖案？在舉一個例子，這些是台灣常見的花，你看大部份的不是油桐花、酢漿草、茉莉花、杜鵑花等等．．．都是五瓣，或者是梅花是三瓣，大部份是三五八，如果你注意花的話，有看過七瓣的花朵嗎？如果按照演化理論來講就是說它通過突變與天擇，那它為什麼突變就突變不出來七瓣的？七難道就有什麼道理不適合我們，還是說從前出現過，然後我們地球不適合七這個數字，

然後把它淘汰掉了，很難想像是這個樣子，所以可能七根本就沒有出現過，不是因為突變的原因，而是物理定律決定它，這是一種可能的想法，所以這個就是我們物理學家在想的問題，如果不是透過創造或者透過演化，那還有其他道理可以解釋生物的形狀斑紋是如何形成的。

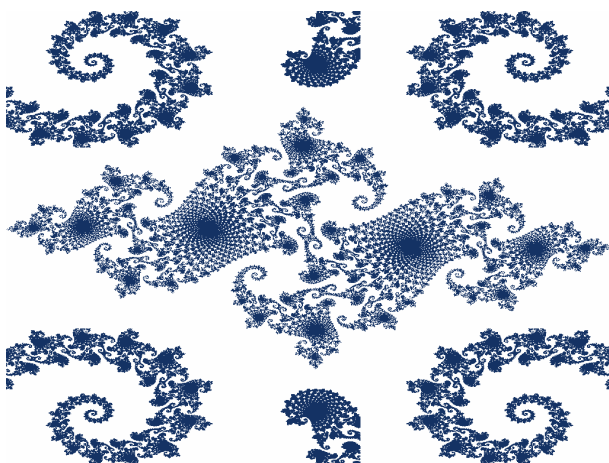


好，當然生物學沒有那麼簡單，只有十九世紀的演化論嗎？現在已經發展到更深一層了，所有生物的遺傳密碼都存在基因，這個是二十世紀進入二十一世紀，大家最熱的一個話題，那在 2003 年有所謂這個基因體計畫，把人類整個基因排序 ACGT 的次序的鹽基排列都解碼出來了，那這個是我們物理學家的一個貢獻，知道這個 DNA 透過 x 光知道它是一個雙螺旋的結構，所有的遺傳基因都可以就是都可以用遺傳基因來解釋，那生物學家就開始在找說，阿茲罕默症可能來自於這一段的這個鹽基的排列，所以得這個病的人就是他的排列突變，然後排列的次序不對跟正常人不一樣，所以他就得了這個病，基本上概念就是這一段的排列次序不對所以造成這個病，而某一段基因排列造成了人是兩隻手而不是三隻手，所以他們就找到這一個源頭，這些不管病症或者是形狀的源頭來自於基因，那如果真的以後找到這個源頭而且還能用遺傳工程控制去做一些不同的排列，甚至製造不同的形狀出來那是不是人的生活就不一樣了，生物學家目前都在努力找出這個源頭，除了找出源頭之外還有工作要做，從源頭怎麼到這個結果，這就是過程，那這個就是需要很努力的，有人說 2003 年的基因體工程計畫只是個開始，因為找到源頭了，研究這個過程是怎麼樣子，生物二十一世紀對最紅的當然就是所謂的演化發育學 Evo-Devo，這就叫系統生物學，想要用傳統物理的概念很有系統的去研究科學，很有系統的研究從這個基因怎麼達到最後的結果，這個過程有什麼源頭基因、有什麼調控基因等等，他們都把他找出過程來，可以想想這是一個很複雜的工程。

當然我們物理學家對生物不是那麼懂，那我們從表面看這個問題，回頭來看這個豹紋到底怎麼產生，我們看牠的紋路就是看牠的樣子，譬如我們先看這幅圖畫，這幅圖畫是很有名的畫家畫的，這個畫了很多壁虎，大大小小的，它具有自

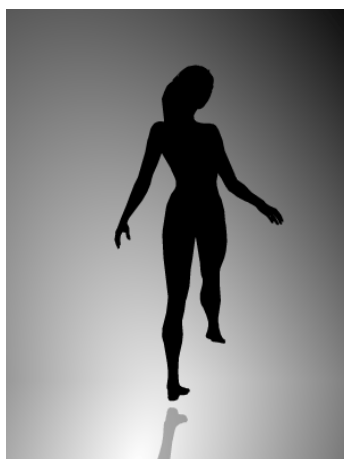
我相似性，這跟豹紋有點關係，你看豹紋這一些斑點每一個地方都有自我相似，不完全一樣但有一點像，另外一幅畫這是美國畫家帕洛特，這是所謂的低彩畫，把畫布放在地上這樣子用亂噴的，然後這個放在美國紐約的國家藝術館，他漂亮在哪裡？當然這個大家自己決定，不過我說它裡頭至少亂中有序，他好像就亂亂的但是它背後有點次序在這裡。好，這裡我就講出兩個特性了，一個是自我相似，一個是亂中有序，現在我就要引進碎形，這個就是碎形的概念，碎形式什麼東西？

碎形基本上就是，具有自我相似性、亂中有序，還有一個更重要的它有無窮的結構，無窮結構就是說你把它一直放大下去，它還是有結構不會變成一條直線，比如說我把它放大，另外還有一個很重要的，前面那些圖案都是畫家畫出來的，花了幾小時幾天甚至幾個月畫的，我們畫這個那麼複雜的碎形圖案可能只要幾秒鐘最多幾分鐘一下就出來，你寫幾行電腦程式，其實用的就是一個高中學到的複數，一個複數在一個平面上的點，你把它剪掉一個數字在開根號取正負號，所以你開始有一個點，你把它剪掉 C 跑到這裡，然後取開根號它變成正副號取兩點，這兩點就把它打出來，這個步驟你反覆的作，減掉 c 開根號取正負號，反覆做把過程的每一個複數點出來，畫出來你就得到這個圖形了，它自然就會組織它自己的結構出來並且具有這些自我相似性，這好像很複雜，可是它背後又有一些次序在裡頭，並且有無窮的結構，我把中心這裡放大起來，它裡頭還是有這些結構，而且螺旋這個部份還是會一再的重複的出現，這就是有無窮的結構，這個就是碎形，基本上這樣講它就是一個幾何然後他非常的漂亮，它之所以會那麼流行主要是它漂亮，你如果上網去查碎形，可以查英文叫 fractal 會有上百千個網頁，他們都創造了很多很多很漂亮的圖案。我接下來介紹的就是碎形基本概念是這樣，我會介紹他一些特性，然後我們怎麼利用它的特性我們去製造它，最後我們歸納出來，我們會知道它的道理跟生物的圖案的形成有一個關係，所以我又回到生物的圖案，這就是豹紋是怎麼產生的，所以我們可以進入一下碎形然後再回到我們生物的圖案。



碎形是法國數學家 Mandelbrot，在 1970 年代他發展出來的，他是一個很特立獨行的數學家，他不是主流的數學家，因為他是比較從幾何來看所有的數學的，在法國二十世紀初期，有所謂的巴洛克學派，就是講數學都要完全抽象化的都不能有圖像的，不過他就很反對因為他喜歡的就是幾何，所以他創造出來碎形，fractal 這個英文字就是他發明的，本來查字典是沒有這個字的。用他的名字現在有一個 Mandelbrot set 就是曼德布洛特集合，就是這

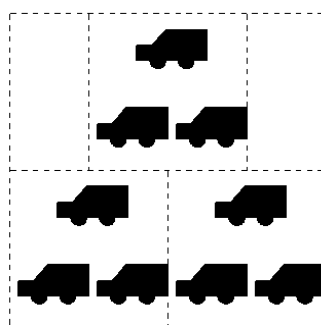
個看起來有點像蟲的這個集合，畫在複數平面上就是這個樣子，那這個下面就是一直放大放大到各種圖案出來，那我給你們看它的一個連續的放大這一個是原來的 Mandelbrot set，然後我們它連續的放大，這個就是要我把這個局部的地方一直放大到百萬倍千萬倍，你在邊邊的地方還是會看到它，我就要讓你看這個連續的影像，它一直連續的變化，它週遭也一直變化，這個主體還是會一直反覆的重複再出現，這就所謂的自我相似性，我再給你看一個典型的碎形圖案，這是我加上的顏色，這個就是說碎形之所以流行起來，那這個你眼睛可能大部份人可能看的是，會跟著這個像是巨龍的形狀，如果把它框起來注意這中間黃色的部份，它是不是就是我剛才看的那個單色的圖形，可是你第一眼大概不會看到這個東西。

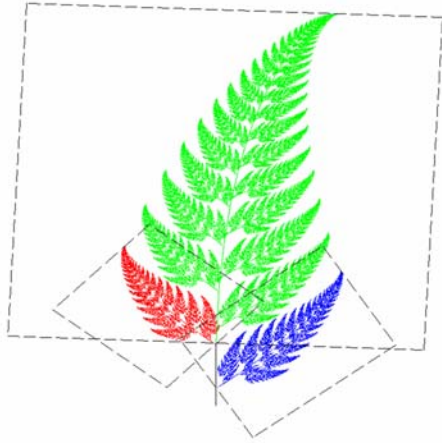


我就離題一下下，這個就是眼睛有時候會被欺騙，或是說我們腦子會被欺騙，所以我舉一個例子，這是在網路上流傳甚廣的，讓大家看一下我們的眼睛是會被欺騙或是我們腦子會被欺騙，你看這個影像，它到底是順時鐘轉還是反時鐘轉，當可能有看到兩個方向都看到的對吧，根據這個網路的說法是如果你兩個方向都看的到，你的智商在一百六以上，而你看到是順時鐘轉你是用左腦在觀察，如果看到反時鐘轉你是用右腦在觀察，不過我可以讓你的智商變成一百六，如果我把上半身遮掉，它就不是左右在轉而是來回擺，這個就是當然這個牽扯到心理學。

好，這個是很典型的碎形，它比較容易，很複雜很繁複有無窮的結構，那我們要製造它卻是很簡單剛才那個例子只需要一個所謂的映射，把一個數字換到一個數字而已然後反覆一直做，這個也是一個碎形，它也有碎形的特性，一個形狀它有自我相似性，一直下去都是跟它整體是一樣的，然後你把每一個小地方把它放大起來還是它自己，而且一直放大無窮放大還是有結構，所以它具有無窮結構和自我相似

性，要製造它確實很簡單，你先拿一個正方形中間畫了一部車子，然後你把這個車子縮小一半，然後把圖案放在左下角放一下右下角放一個，正上方放一個，就得到這個圖，用這個規則再做一次，把它縮小一半，長寬各縮小一半，左下角放一個右下角放一個上面放一個就得到這個圖，這樣你反覆的做然後再做幾次之後，你會得到這個圖形，所以你只要規則定好，就有一個必定的結果，而且跟你開始是什麼沒有關係，你開始可以畫一個蘋果畫一隻猩猩畫一隻花豹都沒有關係，最後都是這個圖案，跟起始點無關過程才是最重要的，我們平常再講也是這樣，跟你的出生什麼都無關，重點是你的過程，過程決定你的將，碎形也傳達這個概念，所以非常簡單。





再舉一個例子，剛才純粹一個圖案，現在畫一個這個比較像所謂的蕨類植物的葉子，它也是一個典型的碎形事實上，也有自我相似性，小的跟大的還是很像，它也很繁複你如果真的一直放大下去它也大概長的這個樣子，那它怎麼製造出來，我們說除了一點一點去畫它之外，我可以把它變成規則，我用剛才製造碎形的觀念把它變成規則，怎麼弄規則呢？你先把它相似的部份用平行四邊形把它框起來，我先把它分成四等四部份綠色的紅色的藍色的還有這個梗的部份，那每一個部份都用一個平行四邊形把它框起來，這個平行四邊形就縮成一

個線段了，面積變成零，然後我們的規則就是你把一個正方形變成這個平行四邊形，這是一個簡單的規則而已，幾何上就是這樣，你把它變成代數的話就是一個線性方的一個方程式的轉換也很簡單，從這個變成這樣這就叫做一個規則，然後我們有四個部份，把四個部份組裝起來，然後這個變成右下角，經過你做很多次以後就得到它了，所以它很簡單，你想想看這個當然不是用人去做，現在是電腦時代電腦是基本工具，你只要寫幾行的程式就好，做一個迴圈它就反覆的做，瞬間就出來了。

剛才介紹了兩個例子，兩個圖案我現在只是把它寫成一個程式你可以看到更多的例子，我們做剛才這個羊齒葉四個長方形，那你只要叫他執行，它在右邊就會出現，反覆的做就會出現羊齒葉植物出來，其實我是叫他慢一點，要不然它是瞬間就做出來了，那我在舉一個例子，我讓它執行，它就會出現它這個規則最後會得到什麼圖案，所以你就可以製造出很多不一樣的圖案，我現在隨便點一個四邊形，然後執行四邊形很簡單兩個四邊形，它最後就會得到一個圖形了，那這一個當然可以製造很多漂亮的圖案，我這個只是舉個例子，現在我們畫一個稻草人，像這樣的話，它會畫出一個比較像稻草人的樣子，這樣的一個規則，你可以去選擇規則就可以會出圖形了。

那有人會開始思考，簡單的一個過程決定了最後的結果，就有人去思考有什麼樣的應用，這個學問就是這樣子，有時候聽一聽不同領域的東西，你就會用到



影像壓縮
碎形的應用之一

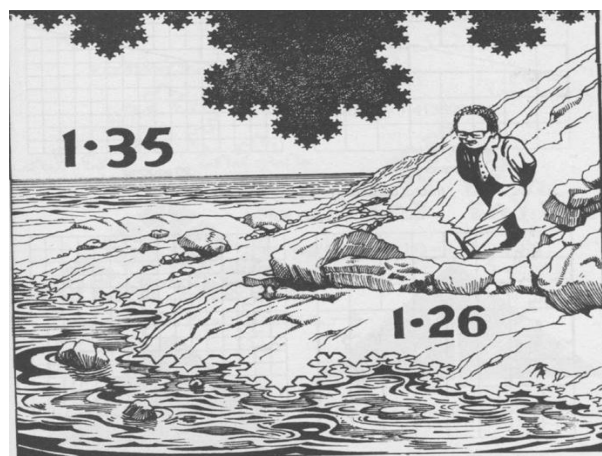
你自己的工作上面，剛才說規則跟初始條件無關，然後你只要儲存簡單的規則就可以得到很繁複的圖案，人家就想說我可以來做影像壓縮，譬如說這裡有一個模特兒的相片，你要儲存這個影像，假設你這是一千乘以一千的，共一百萬個點每一個點的灰階值你都要儲存下來，所以你可能要用到至少 1 MAGA 的硬碟才能儲存這個影像，現在影像很多很多的時候甚至於影片的時候，硬碟空間可能會不夠，所以

我們要把它壓縮，如果 IMAGA 我可以壓縮到 1K 那就壓縮一千倍，那是不是我就可以儲存一千倍的資料，這就是壓縮的概念，那使用的壓縮比都不是很高，但是用碎形就可以將壓縮比提高，那概念就是剛才那樣子，一個影像我只要儲存規則就好，我找到這個影像的規則，然後把規則存下來，這就是一種密碼，人家都不知道你影像是什麼，因為你儲存的是一條規則，你只要之後拿到這個規則放到你的電腦去把它重複的做，就會得到圖形了，不管一開始是什麼樣的圖案後來都會變成模特兒的影像，所以個規則儲存你只要使用 1K 空間而不是 IMAGA，所以你壓縮了一千倍，而且你還儲存了等於是一個密碼的儲存，而不是儲存影像，這個應用可以在經濟效益上很高的所以這個是有些公司已經開始在研發這個東西，可能會影響將來資訊業的應用，所以這個就是說簡單的概念你能不能想到它的應用到有用的地方，這在於人的思考好。

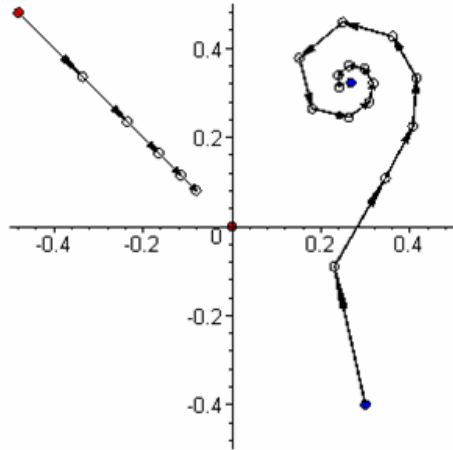
再看看我們碎形最早 Mandelbrot 他如何發現碎形，他看到有一個叫瑞洽生的報告，他去看百科全書，看到百科全書有記載西班牙的海岸線有多長，然後他發現不同年份的百科全書的記載數字都不一樣，如果是我們一般人的想法就是不同人或是不同方法去做測量，那可能是一些不小心的失誤而導致數字的出入，可是他就很細心的把每一年的資料查出來，查說他們到底是用什麼尺度去量這個海岸線，然後他發現了一個事實，如果說他用一百公尺做單位比另一年他用一千公尺一公里做單位去量海岸線，用越短的尺度去量海岸線得到的答案會越長，他把這些點都畫出來，用對數轉換就會是一條直線，而 Mandelbrot 就是有辦法把他抓出來，然後就看出它裡頭的道理來，



他說這個性質就是碎形的特性，一條海岸線你用不同的尺度去量他，你會的到不同的答案，就有碎形的特性才會有這個結果，你如果今天把尺度一直縮小縮到很小接近於零的話，得到的極限是海岸線會是無窮大，也就是說你可以使用很小的尺度的畫的話量出來答案會是無窮長，海岸線會無窮長，當然這是一個近似到一個



原子尺度，那一條曲線在一個有限空間裡，它長度要是無窮長這是什麼意思？曲線就不是一維的嗎？一維就是要有長度阿！可是它在有限空間長度卻是無窮長，所以海岸線是碎形不是一維的，他就引進碎形的另外一個特徵叫碎形維度，碎形維度你可以這樣講，它突破了愛因斯坦的想法，愛因斯坦說空間是三維、時間的是四維，甚至量子理論告訴你空間應該是十一維，自然



的幾何事實上不只這些整數的維度，它還可以是具有小數點的。那海岸線呢？他的維度是一點二六維，海岸線的長度是無窮長它沒有面積，所以它不是二維因此它的維度一定要小於二，它長度無窮長所以維度一定要大於一，因此他就發明了一個方法，怎

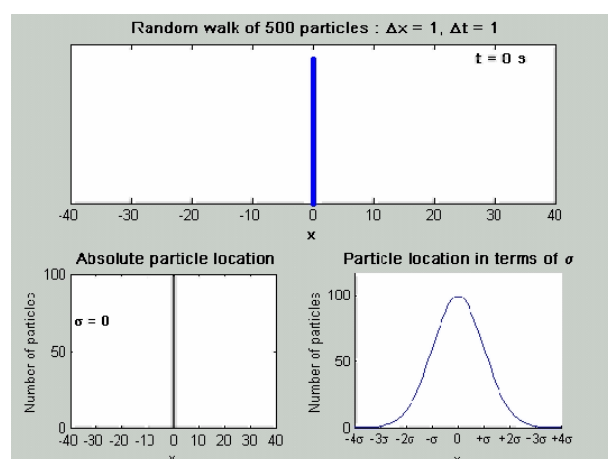
麼去算這個所謂碎形的維度？譬如說雲朵如果算他的邊緣可能是一點三五，所以這個是很跟直覺不太一樣的，他創造另一種幾何叫碎形，碎形另一個特徵就是它維度不是整數，當你要比較兩個東西的時候，要把東西擺在同一個空間才可以比較，同樣是一維的你才可以比較它們的長短，同樣是二維才可以比較它們面積的大小，總不能比較一條直線跟一個平面誰比較大，所以你要擺在同一個位置的維度，你用這兩個碎形都是使用剛才那個程式製造的，但是它們維度不一樣，它們都是碎形可是它這個是一點二五維，這一點三五維，這兩個根本不能比較，一定要有相同的維度才可以比較，所以碎形維度是一個很重要的概念。

接下來我們先稍微玩一下一個遊戲，當然也是要來看碎形的特性假設你無意中掉入一個魔術島去，這三角形的島在大洋裡頭，這魔術島有一個規則，只可以選第一天你在哪裡睡覺，選擇在某一點睡覺之後，隔天早上它會把你推到最近頂點的兩倍距離外，白天你可以去哪裡玩隨便你，可是晚上它就規定你要回來原來的點睡覺，那換句話說你只能第一天可以選擇睡覺的地方，現在的問題是你要選擇哪裡才不會被推到海裡頭去，現在規則都清楚了，這個是一個大海外面有鯊魚，所以你掉下去一定就死掉了，所以第一個想法可能很天真就那我最好距離海遠一點比較好，那我就選這裡好了但是這樣一天就掛了，現在你要選擇哪裡才不會死掉，頂點是一個好答案，頂點就代表他最近的它距離是零，零乘二還是零，所以你就不會動永遠都留在那裡，我們看看我們軟體有沒有做對，我就選頂點，但是點了半天點不到，頂點的確是一個答案可是你選不到，它不存在嗎？頂點當然存在可是你選不到，還有沒有其他可能，譬如說外心就是到三頂點等距離的地方，大概在這裡問題是你還是點不到那一點因為三條線等距離它就可能留在那裡，其實它有無窮個答案，都會讓不讓你掉到水裡頭去，可是這無窮的答案，就是無窮個點但你都選不到，很吊詭吧無窮個答案可是你都是找不到它，想想為什麼？道理很簡單，頂點是一個點沒有面積，沒有面積代表它旁邊區域有無窮多個點，等於在無窮多個點中你要選一點機會是零，就好像你買樂透總會有人中樂透，但是你買總是不會中，這同樣的道理因為機率幾乎是零這個機率比樂透的機率還低，所以無窮多個答案可是你卻找不到它這實在是很奇怪的一件事，好那我告訴你一個方法可以找到答案，我把它畫出來把它反過來想，剛才這個遊戲是說你把每一點到頂點的距離把它加倍，那我要找答案所以把它反過來減半，假設把規則改變一下我假設規則是被吸到三個頂點某一個頂點一半距離的地方，那就會把所有點都呈現出來，答案是什賓司基三角形就是它的答案，你如果選到它們的話，你就永遠不會掉到水裡頭去，所以我說答案有無窮多個，可是你就是點不到那些點，因為它的面積是零所以你選不到，碎形的特徵是它長度可以無窮長，長度加起來無窮長可是面積是零這個就是它，所以它維度一定是介於一跟二之間，這裡也提供我們一個怎麼去製造碎形的方法，什賓司三角形這個圖案我怎麼製造出來？我是用三個頂點來吸引它們，你可以這樣講每一次就把它距離減半，等於

就把它吸過來，也就是三個頂點在競爭，也就是表示我們一個人睡在那裡，他這個點的軌跡被這三個頂點在競爭在吸引，它們競爭的結果你把它畫出來就是一個碎形，所以這個告訴我們得到的一個結論，你可能有不同的方式製造碎形，可是最根本的是來自於吸子的競爭，你把每一個點三角形的頂點當作一個吸子，它是要吸東西的然後他們在競爭，我再舉這個例子，這個就是說我有一個直線點吸子，另外還有一種吸子吸引東西但不一定要直線的吸引，我可以螺旋式的吸引也是一種可能，吸引的方式有不同的形式，那我們看看這兩個吸子在競爭，它會得到什麼結果，螺旋吸子把這個點慢慢吸過來，然後我在引進一個點線性吸子，如果只有存在一個吸子，結果最後都會到這個吸子去，如果兩個同時存在就開始要競爭了，我們看看這一點被這兩個吸引在競爭的時候，它一下子被他吸，吸它就藍色的其他就紅色的，它們兩個在競爭的結果最後的圖案就是一個碎形，就是一個有無窮結構，線性也隱藏在裡面螺旋也會隱藏在裡面的一個碎形圖案。

既然講到競爭我們談到碎形第二個最重要的應用，經濟學上的應用，競爭這個概念，十八世紀亞當史密斯就講了，就是經濟學裡面看不見的手就是競爭，一個物品的價格如果只有一家在賣的話，他愛怎麼定就可以，可是當有別人跟他競爭的時候，就必須調整最後物價到一定的平衡點，比它稍微成本多一點適合的價格上面，這個是沒有外在的原因純粹來自於競爭，這個就是亞當史密斯非常有名的看不見的手，那還有一個經濟學裡相當重要的理論就是馬克斯提出來的，馬克斯說這個資本主義終究會不見，一定會變成社會主義或是共產主義，那這個預言當然錯了，現在世界看起來都是資本主義了，不過雖然是錯了，但是還是一個科學邏輯思考出來的結果，那這個我們今天就先不談，那在經濟學裡馬克斯提出一個很重要的概念，市場的變化是源在於內在的特性，簡單來講它內部的矛盾，這樣講的對不對，那不一定要有外在原因，外在原因可能是戰爭或選舉，但是即使沒有這些因素市場本身就會造成市場的變化，內在的特性這個是一個很重要的概念，現在慢慢大家相信這個是對的，那問題是如果市場的變化是它的內在因素，我們怎麼去預測、怎麼去掌握它，這是大部份人關心的，如果能預測股市的話那不得了了，不過很顯然是還沒成功，不過這個還是在研究，經濟學最後目標就是要做到精準預測股市怎麼起伏。我給你看台灣股市的曲線指數，在大概九零年代飆到上萬點，一萬一萬二所以最高然後又跌下來這就是股市曲線，那就有什麼基本盤、技術面等等的東西，我們不管那個，我們就是看這一條線曲線，它怎麼看起來就像碎形彎彎曲曲的所以一直有在變化，那我能不能用碎形來研究它呢？這一條股市如果畫它的變化量，就是把兩天的指數相減除以前一天的，它一定在一個範圍內，正的代表說他股市上升，負的就代表說下降，它就是這樣一直上上下下，所以誰能預測這樣一個變化呢？在二十世紀有人提出來，就是說這個所謂的隨機行走，就好像是一個醉漢，有時候往左走一下有時候往又走一下，亂走的結果就是這樣上上下下，所以就有人提出經濟的內在是不是就是一種隨機行為，如果是隨機行為我們就可以畫出，用統計的方式我就可以畫出他的分佈，越遠的當然機率就不大，回到原點的機率是最大，因為他左右機會都二分之一嘛，所以你畫出的曲線就叫高斯曲線或正常分佈，然後你把他取對數，隨機行走概念是這樣，假設一開始有五百個人你讓他左右隨便亂走，然後統計每一個位置的人數然後把他畫圖，你就看到統計出來的圖形就是這樣，留在原點的人數是最多的，你看這個就是我剛才那個分佈曲線，這個叫所謂的正常分佈，所以隨機行走他雖然是亂的，可是統計上是可以看出他整個分佈的。對數就是這樣譬如假設一個人有

三個學生，一個有一塊、一個有十塊、一個有一百塊，你畫出來他們有一塊有一百有十，你看這個上升的一個曲線，他們分野很大，可是如果我把他取對數的話，就是把這尺度重新畫過，十、一百、就是十的零次方、一次方、二次方這三點，就變成一條直線了，然後我就用他的次方，零次方、一次方、二次方來畫這條線，原來的線性尺度一、十、一百用對數尺度就變這樣子，這個就看出來有名的定理就是圈外對數定理，就是說你本來在這邊差異很大的，如果一個圈外的人來看這個差異很大的事情，他差異就變的很小了，圈內的人看事情是線性尺度所以差異很大，但是圈外人用對數尺度來看事情所以差異很小，譬如說舉一個例子，像我女兒在一中資優班，他們班上他們成績也競爭的很厲害，有人很高分有人很低分，圈內的人感覺差異很大，可是從我們圈外的我們家長來看，這些人都非常優秀，他們差異其實不大，因為我們是圈外的人去看圈內的事物，其實我們是用對數尺度去看，所以他們其實沒有什麼差別，當然可以把這個延伸一下，就是說你從圈外去看圈內競爭永遠是看不清楚的，你真的要了解圈內的事情你要進去，不進去永遠都看不清楚，當然另一個方向你如果人在圈內的話，要解決問題最好要跳出圈外，你自然事情就解決了如果在裡面永遠解決不了的。



好現在回到這個經濟學，經濟學是很多人關心的，他的理論也是很複雜的，我現在給你看這個式子，這個讓這兩個人得諾貝爾經濟獎，他們在七三年提出來在九七年得了諾貝爾獎，其中一個 Black 這個人過世了所以他沒有拿到，不過他們得諾貝爾獎他們引進一個很新的概念，就是這個 option 的概念，很多公司就用他們這一套在算成本算風險，有一個特別的地方就是要假設這裡頭價格的變動是隨

機的，他整個理論要建立在這上面，就我剛才講的隨機行走，這個如果他假設是錯的，那這個方程式其實都根本沒有用了，事實上已經證明他不對了，但是他們諾貝爾獎已經拿走了，我在給你看一下這個是台灣股市的變化圖，如果隨機行走這個是他們假設的，股市是隨這個變化，這兩個真的一樣嗎？他當然是上上下下，可是不完全一樣，這個他上下比較均勻的在變化，這個他有小小的變化突然有比較大的變化股市是這個樣子的，股市沒有那麼單純不是隨機行走，股市不是一個隨機行為，他的確就不是因為人有意志有想法有策略所以絕對不是隨機的，其實統計上也不會對，所以我們在看數據這個就有一些物理學家做經濟物理學，他們在做的研究是這樣的，隨機行走如果你把他畫成高斯分佈用對數他是這個樣子，可是你把台灣股市用圈圈的點畫起來，你看看這個圈圈的點跟這個他們的假設，現代經濟學的假設根本就不對他只有在中間這裡對而已，就知道隨機假設其實是錯的，所以現在很多人投入在研究說股市這個分佈我們要用什麼樣的性質來研究，其中一個就是碎形，如果用比較複雜一點的碎形叫做複式碎形，我可以製造出來這樣一個分佈，這個就是碎形創始人他最感興趣是經濟學而不是幾何，他的目標就是要做經濟學股市的分析，他進一步用複式碎形製造這個，他認為他比較像真正的股市，是不是以後碎形理論真的可以解釋這股市的變化，如過可行

那將來研究碎形的人將來會很有錢。



另外一個碎形很重要的尤其在學術界，碎形其實是混沌的幾何，接下來我們要回到我們的豹紋，我們現在看，剛才談到這個隨機行走，如果我看很多分子或很多集體的隨機行走，其實就是我們物理上講的擴散，你把牛奶滴到杯子裡，牛奶的每一個分子都在做隨機行走所謂的布朗運動，這是愛因斯坦得諾貝爾獎的原因之一，他也是這樣最早提出布朗運動，你想想看牛奶最後會怎樣，他會擴散到整個杯子去，所以會白白的一片對不對，因此無目標的運動隨機行走不會造成圖案，什麼叫做圖案？圖案就是你會看到有分別，我們如果白白的一片就不叫做圖案了，總要有黑白的分佈這叫圖案，那擴散隨機行走是不會造成圖案的，

可是這個有革命思想的人是會在不可能的地方找到可能，這個叫涂林這個是英國的數學家，1952 年提出了這一個想法他 54 年就自殺了，四十二歲就自殺了，這個涂林當然非常有名，在資訊界人家講人工智慧之父就是他，因為他是最早想用機器做思考計算的，電腦也是在他催生下產生的，所以電腦也是他最早的一個想法，那他的貢獻當然不止這裡，他在 52 提出生物物理也就是說他提出圖案是怎麼形成的，你能不能想出一個道理，除了創造除了演化，有沒有什麼道理可以形成圖案，他就想出他說擴散加反應就能形成圖案，擴散剛才已經講了，前面一個例子牛奶滴到水裡不會形成圖案，還要有反應，光反應還不行反應達到平衡之後還是沒有圖案，你一定要反應加擴散這兩個結合起來就可以形成圖案，至少跟平常人家對擴散的了解是一個革命性的想法，那這一個我們可以這樣把他解釋，擴散就是把東西分散開來，反應可以把東西聚集起來，譬如說你 A 化學物質加 B 化學物質，他有產生更多的 A，那就是把 A 又聚在一起，所以他基本上這種想法，你可以想想看就是一種分散跟聚集的一種競爭，所以我們又回到競爭了，碎形是吸子的競爭，你可以把他看成吸子，一個是要把他分散開的一種吸引力，一個是要把他聚集起來的吸引力，這兩個的競爭下他可以形成圖案，這個是一個觀念上的突破，數學家就用數學方程式來做，那這個就是我們做的工作，我們用他的想法我們就寫出數學方程式來，然後怎麼把這個觀念來落實我們來形成圖案，再舉一個例子形成圖案可以很簡單，當然舉例就舉比較有名的例子，2005 年的經濟諾貝爾獎提出的一個想法，他的模型就是這個樣子，是講美國的社會黑人跟白人，那我現在就把他改成藍跟綠，那就假設他每個人要住的位置在那裡，他就是說他的結論是這樣，每一個黑人或白人，每一個人旁邊有八個鄰居，我們用這個方格表示，中間一點旁邊就有八格就八個鄰居，只要我的鄰居一半以上跟我一樣就好，有四個跟我一樣就好，我就繼續住這裡我就不搬，這個條件不嚴苛吧，我又不是說所有的都要同顏色的，然後假設你不符合條件你就搬，他就把他模擬出來，像我這個隨機的一開始大家隨便住，藍綠隨便住，然後如果說這個藍色的，他如果覺得的他旁邊綠色有太多的就搬，藍色的多就不搬，所以你就一個一個人就這樣子，如果他條件不符合我就搬條件不符合我就搬，然後就一直弄到平衡，大家都滿意了就符合條件了這樣子，那最後的結果是什麼，最後的結果一定是藍綠分離，只要一點點小偏見就是這樣的結果，那這個我要講圖案就形成了，一開始是亂七八糟的，可是他一定會形成圖案。再舉一個放大一點剛才才是小格子，其

實是完全一樣，這隨機一開始隨便的住，把這個條件一放進去，最後就會形成藍綠分離出來，就會一定成這樣，他就是當然很多著作，主要是這個精神得了經濟學諾貝爾獎，所以我說並不是那麼困難，不過我這裡要借用他，圖案這也是形成圖案的一種機制，好那在回到我們生物圖案，剛才那個是社會學上的居住的分佈，我們現在看大腸桿菌，我用一個碎形來模擬大腸桿菌，真正大腸桿菌在這裡這個燈光不是很清楚，這個放大十萬倍的大腸桿菌，大腸桿菌看起來就是桿菌就是一條桿子所以叫桿菌，不過他這個大腸桿菌還有尾巴，鞭毛大腸桿菌很有趣，大腸桿菌很有趣的原因鞭毛如果正轉的時候他就衝很快，反轉他就會跌倒，所以你在顯微鏡看他就會衝、摔倒、衝、摔倒，然後他衝的方向是隨機的，他每一隻大腸桿菌都是隨機的有時候這邊衝然後就摔倒，這邊衝然後就摔倒，那大腸桿菌所有生物學研究的白老鼠，現在動物實驗都是抓老鼠，生物實驗大概大家都有大腸桿菌，他最好拿然後又無害，最多是拉肚子而已，所以大家都用他在做實驗，大腸桿菌研究的很透徹，然後大腸桿菌還有一個現在生物學很重要的，就是剛剛講的他的鞭毛會轉他轉的很快，他的效率幾乎是百分之百就能量完全沒浪費，他吸收之後 ATP 把能量幾乎變成他的轉動，那這個他們生物學家在想怎麼把他，這叫生物馬達他們就想借用到底他的原理在哪，我能不能製造一個馬達跟生物馬達一樣，這個也是現在最紅的生物研究，大腸桿菌用途非常多，我們實驗室也有他，我幾個學生也在養這個，當然我不是研究生物，我先把牠縮小，假設把他縮小比較像真的一樣，然後他就會亂跑，每一隻大腸桿菌其實是隨機行走就是亂跑，可是等他很多聚集在一起的時候，它可不是隨機行走，因為隨機行走，我剛才講過是不會有圖案的均勻一片，可是你看我們一個培養皿然後放洋菜，然後上面當然調一些養分他要吃的養分在上面，我們就滴一滴，滴在正中心裡頭大概有一百萬隻的大腸桿菌，把他滴在這裡然後他這邊食物吃完就往外走找食物，每一隻都是往外擴散，然後最後會你看形成這個圖案，每一個白色的就是聚集越亮的就代表聚集越多的大腸桿菌，你看他像一個梅花像一個花朵的形狀，他會形成圖案，那大腸桿菌為什麼會形成圖案？如果他大家都是亂走的話，他為什麼要形成圖案？他為什麼要聚集在那裡？這個現在大家都不懂我們現在也在研究這個，我只是說他為什麼你要去了解大腸桿菌的行為，？到底是什麼他絕對不是隨機行走，至少我們知道他除了隨機行走還會分泌一個東西出來，這實驗室裡量的到，這個分泌類似荷爾蒙的東西他會吸引他的同伴，所以他有聚集的效果，你就可以想到我們剛才講的有吸引就會聚集，他會亂走就會分散，所以他還是在一種競爭下所以會形成圖案，這是我們基本想法，可是從基本想法你要把他落實，你要最終我們要的工具還是你要把他方程式化，要模擬出來這才算數，不過另一種想法比較簡單一點不要用數學方程式用規則碎形告訴我們，我們也可以用規則的方式來玩這個遊戲，那這個也是很有名叫生命遊戲，細胞有一格你想想看大腸桿菌也好，黑的地方就代表有一個活的細胞在那裡，白的地方就是沒有或是死了，那我們看看我們給他一個規則，像這樣每一格裡頭的細胞有八個鄰居如果說他旁邊鄰居太少他就孤單而死，這就跟經濟學研究一樣那席琳的 model 他得諾貝爾經濟學獎，其實大家都通的物理學家也在玩這個數學家也在玩這個，你看他鄰居一個或沒有就孤單而死，就是我們在定規則，如果他鄰居太多擁擠而死，太擠了他也會死掉，然後如果他鄰居兩個或三個，那他很好他就幸福快樂的活在那裡，如果我們看中這一格如果旁邊剛好有三個鄰居，那他會生出來如果沒有他就合力讓他長出一隻活一個細胞出來，好這個就是我們的規則，那我一樣把一個平面畫成很多格子，我們把這個規則把他加進去，然後我一開始隨便給他一個分佈，假設這個紅

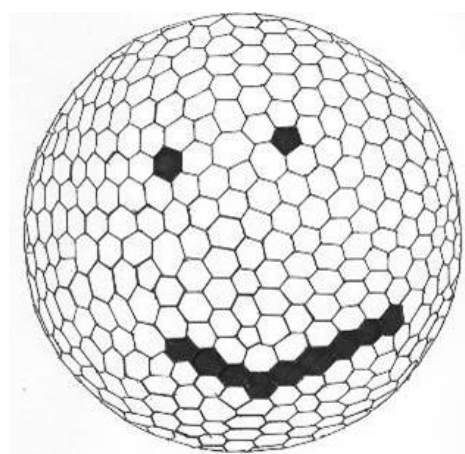
的格子就代表一個細胞，那沒有就是死，然後我看他怎麼演化，隨著時間怎麼就把那個規則放進去，如果我每一次只做一次，那你就會看到他怎麼演化，他就會開始做一些變化，那這個就叫做細胞生命遊戲，他有些很特別就是很多人玩了就發現，譬如這一個組合，這個組合你看看他每一次的變化，我現在一次做三十次變化，我按一次執行那個規則就做三十次，那你看他怎麼變，這三十次每一次都是三十次，你看這變成一個週期性的變化，他的週期就是三十，這一個他們叫做天行者，因為他就是一直跑一直跑他透過規則就好像一直跑，那這個他們把他叫做機槍，會一直放射這個子彈出來，然後這個一個食客，會把這個子彈吃掉，他吃掉會恢復原狀，所以這個叫做機槍與食客就這樣子，其中當然這個你要去找，如果今天隨便在加一點那整個就會變掉了，他規則在做這些特性就不見了就會亂掉了，所以你要找的剛剛好。我再給你看一個比較有趣的我們找一個機器人，他吃東西會變胖，他就越來越胖而且形狀不會變。那這個東西是沒辦法計算的，因為他太複雜了他是一個複雜系統，所以你必須只能用模擬，然後模擬只能嘗試與錯誤去找他可能的平衡態等等之類的。



這是一個方式透過這個遊戲來做，第二個就是我剛剛談到的就是他為什麼形成圖案，這是別人實驗室的，其實不只我們那些特定圖案還有樹枝狀等等別的圖案，其實我的解釋還是來自於擴散和聚集兩個的競爭，接下來的目標就是說，我有這種想法我怎麼用數學方程式把他呈現出來，就回到我們花豹，其實是一樣的，就是說細菌會形成特定圖案，我們從前也做過瓢蟲，瓢

蟲為什麼有那些斑點，那我們現在那看豹，我們也是從這個觀點來看他的紋路怎麼產生，那我們現在假設他上面有兩個化學物質，黑色的跟白色的，然後一開始的分佈也是隨機的，所以是黑白這樣混雜，然後我們就給他這個化學物質去做擴散，然後化學物質他做反應當然你要自己去設定他的反應式子，看你要 $A + B \rightarrow 2A + 3B$ 還是要又跑出 C ，這個就是我們自己要調整，因為沒有人知道他們會做什麼反應，因為目前嚴格講還沒有實驗找到這些化學物質是什麼？所以這個還是停在理論工作，就從涂林一直來的一個模型的想法，然後你怎麼用數學方式把他落實，那實驗室世界有幾處試著在做這個東西，可是很困難因為你不知道他是什麼你就不能去找他，所以這個還在嘗試，不過這個可以說純粹是理論工作，因為反應沒有人知道所以你愛怎麼調就調，不過重點是你能調的出來嗎？那我們就加上某種反應之後我就讓他擴散反應去做，慢慢的這就是我們的模擬，慢慢的點就會形成，從一開始隨機的分佈他慢慢形成點，那第一步我們就形成所謂的獵豹，但是花豹不只有點還有組織，獵豹其實就是比較均勻的點的分佈，所以第一步獵豹比較容易我們就做出來，最後結果比較有對稱性所以我們把這個完成了，那這個不奇怪在我們之前就有人做得出來了，這種比較對稱形的點那大家都停留在這裡，然後我們就進一步，我要做更複雜一點的花豹，就是伊索匹亞人的指紋，還有更複雜的美洲豹，你在注意看美洲豹是一種多邊形裡頭也有小點，所以他比

他還複雜，這個我們花了大概五年的時間才完成，那我們做的不只他最後的結果，事實上我們還去發現豹的斑紋隨著成長也在變，這是小時候大一點到最後，這個是花豹他這個塊狀小時候，最後比較環狀然後這個環狀換斷破掉，變成指紋的這個樣子，所以我把牠的過程分成這三個樣子，我們的目標不只是要做最後的結果，我們還要過程把他做出來，所以我們整個調整我們整個數學方程式，要把這個過程整個弄出來，那基本上就是點環斷掉的環，然後美洲豹也是這樣，看牠小時候這是一塊一塊的，我們假設他就是很接近點狀的，然後大一點也是環，可是牠的環是比較多邊形一點，比較複雜一點的環，最後成長變成多邊形還有小點，所以接下來就是我們的模擬了，我們的工作就是這樣他需要一點點的時間，我們就把他模擬的過程這三個過程把他做出來，我們把他叫做兩階段的成長涂林模型我是用涂林的概念來做這個花豹的圖案模擬，兩階段是這樣一開始我們先長點，大家從前的人就做得到了，然後我們從點做出發然後把它變成環狀，環狀之後又讓他環狀怎麼破裂，變成這個最後的圖案，譬如說我們第一階段就是剛才已經看到了，我們第一階段就是跟做獵豹是一樣的，我們先得到點，那麼這個大家都很好奇，其實我們也知道也講不出非常清楚，就是為什麼我們要兩階段？我用一階段次我方程式只要寫對了我參數調對，但是我最後就會得不到花豹的圖案可，我們一定要分成兩部份，他要先透過點的形成，之後你再做適當的調整方程式參數，你會得到這個結果，這個可以看一下如果你有興趣我們涂林方程，他有擴散有反應，那這反應是我們自己設定的，他裡面有一些參數，就是我們要去調整的，所以你會看到他從點慢慢變成環，環之後這環就慢慢會斷掉，斷掉之後一個環就會有三點、四點、五點，這個就是我們的目標，我們希望最後看到是像花豹，是伊索匹亞人的指紋的樣子，符合一隻花豹從小到大的過程是對的，事實上我們有這個想法是從他的演化來的，我們看到一篇文章他講演化，貓科的演化是從有斑點，然後最後才變成這種圖案，所以我們是這樣想所以我們才必須要分兩階段，從斑點開始這個是美洲豹也是這個樣子，不過美洲豹當然參數調整不同，方程式一同一個方程式，可是他參數調整不一樣，他需要最後結果不一樣，所以我們要製造更大的環，然後他一個環會變成雙環，他內環先破掉之後就變成小點，他外環還保留著，所以你就會變成有一個外邊的這個外邊的多邊形裡頭包著的小細點，這個就比較接近美洲豹最後的這個圖案，這個我們研究工作就是做這麼一個理論完成，那其他就是技術上的細節。



最後我們把這個歸納一下，其實我整個主軸不管是生物圖案的形成功碎形的形成功都是來自於吸子的競爭，兩股力量或多股力量的競爭那我說我把他引用一下，我們小孩子每一個小孩都是碎形，為什麼小孩子對一個雙親家庭，你有父親五邊形、六邊形是母親，父母親都希望把小孩子造成比較像他，看到他像自己就很高興，父母看到自己小孩的樣子都很高興，可是他們還是忽略了他們，他們都是平面的這個小孩子是立體的，所以小孩子跟父母親在不同的空間了，兩個吸引子大家都要吸引他，吸引的結果是什麼？剛才

的心得是什麼？吸引力競爭的結果就是碎形，所以小孩子是一個碎形，好最後在

給大家看一個在測試一下大家的眼力，這一個當然接近我們的碎形，這一個在哪裡出現過，哪一部影片出現過，提醒一下你就知道了，裡頭也有我們的碎形，所以碎形的應用是無所不在，以上就是我的演講，謝謝大家。

Q1 我想問一下什麼是碎形維度？

A1 剛才也稍微提了什麼是維度，首先你要知道維度，維度就是一個幾何所存在的一個地方，那我們就講你怎麼量一維的大小，因為有大小你可以做比較，比較是最重要的東西，因為整個宇宙如果只有一個星球，他在哪裡都無關了因為只有一個，你總要有兩個星球才知道有遠近的關係，這是一個比較概念，如果要比較，維度要對了你才可以做比較，如果你要比較兩條曲線長短，你必須要定義他的維度到底是多少，如果維度是一的才能量長度，而不會去問一個正方形長度多少，如果是這樣你就弄錯維度了，因為他是二維的，你必須量面積而不是量長度，所以維度就是你要測量說這個幾何體的時候，你應該選擇的一個維度空間，他才可以開始做比較，那碎形這種東西就是譬如說我畫的是一個平面，在二維裡頭的碎形他都是一點多維，如果你要比較的話你要把他放到正確的維度去，所以要一點多維。

Q2 那要如何去定值維度後面小數點的值？

A2 這個就比較技術了，維度又有分很多種，碎形維度、郝氏多維度、核子維度，各式各樣的維度，這都是數學家玩的東西，可是嚴格講一個維度算出來都是無理數比較多，所以說我剛才寫的譬如說一點二六那是一個近似值，一個無理數就是無窮小數，所以嚴格講這些碎形，大部份都是一個無理數的維度，所以我只寫了一個近似值，那這個道理也很簡單，無理數比有理數多，所以一個形狀你要說它維度多少，一定是無理數，因為無理數它就是比有理數大的多，所以你說要定幾位，他是有一套方法可以算的，數學家是有一個方式來算，一個碎形在這裡我有不同的方式來算出來，那算當然你用電腦算出結果，可是電腦總有他的極限，你如果用數學家的方法，解析的算出來，那可能答案就是一個無理數了。

Q3 剛有一個圖形看到的結果可以解釋左腦跟右腦思考方向會不同？

A3 該說我不懂啦，其實如果你問我前面那個立體圖那個我懂，那個是我自己製造的，這個應該說腦子詮釋的方式不一樣，應該屬於一種錯覺，所以研究這個應該是心理系的在做的，研究腦子的結構左腦右腦有什麼不一樣，那你的視覺觀察的結果就會不一樣，所以我只能說這樣。

Q4 我想請問一下那個在生物學當中除了豹紋之外還有什麼地方是可以應用到碎形？

A4 我要說我今天雖然把豹紋跟碎形擺在一起，我並不是要講說豹紋是碎形，這個概念不要弄錯了，豹紋是有一些碎形的特性在裡面，譬如說他有自我相似性類似自我相似性，可是豹紋並沒有無窮的結構，所以豹紋絕對不會是碎形，不過我今天為什麼擺在一起，我的主軸是他們形成的原因，我們把豹紋的形成歸結成一種吸引力的競爭，碎形也來自於競爭，它們的形成原理是相似的。所以把它擺在一起，自然界的圖案應該講大部份都不算是碎形，可是很多自然界的東西，譬如說山的稜線、海岸線、雲朵的邊緣，它們都是彎彎曲曲的，這些都近似於碎形，當然他不會真的是百分之百碎形，碎形定義是無窮的結

構，你就要無窮的放大，自然界的東西是不可能的，你放大到一個程度就是原子了，原子在下去就是核子，所以他最後就變空的，所以他不可能有真正的無窮結構，只能到某一層近似，不過這個已經夠好了，就是說自然大部份你看到真的有直線有三角形有正方形嗎？自然都是彎彎曲曲的，所以自然是比較接近於碎形的，所以這個也是因為這樣子，碎形才可以這麼重要，如果今天他純粹只是一個數學活動一個幾何的東西，他不會得到那麼多的迴響，因為它是自然的幾何，或者是說自然接近的幾何，它來描述大自然是更準確的，你描述樹枝張牙舞爪的時候，你很難描述講不出來他怎麼樣，可是你如果今天以碎形這個工具你就會說這個樹枝長的維度是一點二三，至少你可以傳達一個概念一點二三大概有多亂，如果它碎形維度是一點八七，它很接近二，它更亂，所以他給你一個量化的概念說，你可以傳達他這個形狀的概念，要不然平常很難講你只能比較含糊的，這個樹枝長的很亂，就是沒有一個比較準確量化的概念，所以我說碎形很重要的原因就是，這也是 Mandelbrot 它創始人所講的，他的書名 1978 年出的書就叫「碎形的自然幾何」，那這本書寫的非常好，當然也是買的到但是沒有中譯本，它是從天文講到生物講到數學，裡頭包羅萬象講的非常好。

- Q5 我想請教老師，你的基礎理論就是說過程決定他的結果，但是基本前提就是說一定要有隨機而行，但是有些人並不相信機率，比如說愛因斯坦就不相信量子力學，他認為上帝不玩骰子，所以有時你把他基礎條件設定以後，那你的起始點就決定他的結果。
- A5 當然這是一種想法，過程決定結果，就碎形而言初始是與結果無關，但是你說真正的人生是不是這樣，當然是另外一回事了，不過我倒是要說，你說愛因斯坦講過這個是很有名的，大家都流傳說，他不相信上帝會玩骰子這件事，我想愛因斯坦在他晚年應該是後悔了，雖然沒有證實，因為上帝祂製造這個宇宙，祂真的是玩骰子，二十世紀最偉大的物理就是量子力學，很多人過了一百多年了還沒聽過，可能最多你聽相對論，但其實我們生活影響最大的是量子力學，我們現在電腦什麼生物學研究的都是量子理論，量子力學就是建立在機率理論上，在微觀的世界裡頭就是需要機率，至少這個理論造就了我們現在的文明，我們的科學文明就是需要機率理論，所以恐怕愛因斯坦一定是後悔，因為他在 50 年代跟 60 年代，跟波爾的辯論，雖然大家都是大師不會去承認誰輸誰贏，不過他應該是輸了，至少在主流的物理裡頭他是錯的。
- Q6 我要問說你如何確定你產生的圖形就是豹紋，伊索比亞人隨便按一按也很像豹紋，所以你有一種方法確定他的特徵是什麼？
- A6 事實上你看到我們做出來模擬的圖案，可能還都不像，我們這個文章也是奮鬥了一年才發表出來，因為審查人意見跟你一樣，他看不像，可是我們重點是傳遞一個想法，當然他很接近至少比從前努力過的人還接近，所以我們不是在製造很像的圖案，而是說豹紋這一類的圖案我們有沒有一個思維就是說他有沒有一個科學的定律，就是說物理定律能夠形成這種圖案，不要假造創造，不要假造演化，我們有沒有一個方法可以製造這個圖案，所以我們是講說，我們等於是在證實有一組方法，這一組方法是可能的，那到底他對不對，還有待實驗目前實驗還在努力中。
- Q7 這個程式設計是用平行四邊形，那請問可不可以用其他的圖形譬如說三角形或者是其它幾何圖形？
- A7 其實平行四邊形是我從幾何上面比較容易看所以就利用他，原則上你要把他

寫成程式就要把他代數化，一個點的座標透過一個代數方程式換成到另外一個點座標，只是我們那個代數方程式叫做線性的代數方程式，線性的代數方程式就可以用平行四邊形把他的幾何呈現出來，你當然不一定要用線性的，可以用平方的、用三次方的，你要三角函數什麼更複雜的變換那就不可能用平行四邊形來畫，所以我只是找一個、用一個最簡單的例子，而且在這個最簡單的例子你就可以創造無窮多個圖案了。

Q8 請問一下基因可以決定性狀以及碎形圖案的話，那碎形圖案是否可以有個基本化、特徵化來決定性狀，自然界中碎形的原因他會不會像是基因的壓縮？讓他呈現一個簡單的圖形，然後以及尺度的單位他為什麼是無窮長？他不是在一維空間中討論嗎？

A8 我先回答後面這個還比較記得，他為什麼無窮大就是有趣的地方

，他在一個有限範圍裡頭，他為什麼無窮長，他就是這樣子，這個又要進入數學了，所以今天就沒有特別在講裡頭的數學，其實他是簡單的一個證明，從一段變四段長度就會不停的增加，是大於一倍的增加所以到無窮多倍的長度就會變無窮大，為什麼會這樣我簡單的回答這就是碎形，如果你平常不是碎形的幾何圖形就是不可能的，所以你還在用歐氏幾何來思考這個問題，你當然得不到答案，所以你必須跳脫歐氏幾何，你要有碎形幾何才可以達到這個樣子。你講基因可以製造碎形我好像沒有這麼說，碎形跟基因是完全不一樣的事情，現在只是要解釋一個生物圖案的形成，我怎麼去理解他，你可以從生物的角度研究的角度，那好像是說你只要找到基因的排列的話，你就可以知道所有生物圖案的原因了，這個是生物學家大部份做的研究，可是我說那樣是不夠的，你現在好像說我們現在是找到源頭，我們現在有一個湖泊在這裡，這個湖泊是來自哪一個河流的發源地，生物的研究是找那個源頭那就是基因，我們是研究過程，這條水如何匯聚，這個過程從我們物理學家的角度來思考，找源頭當然很重要，沒有源頭就沒有這個結果，現在我不用去改變我的源頭，我甚至都不要去管基因，我只要在過程做水壩做引導，我就可以造成什麼結果，所以我要治療阿茲罕默症，不見得要回頭去改變基因，我只要在過程的變化裡頭我調整參數，注射什麼化學物質進去，我改變他的反應的話，我就可以改變結果了。

Q9 我想樣問一下你剛剛說的影像可以用那個很簡單的規則變成形，那文字跟聲波傳訊可以嗎？如果他具有碎形特性的話，你要如何想辦法找出他的碎形特性，譬如說剛才講的那個模特兒的圖像他有碎形特性嗎？

A9 第一眼看一定沒有，因為他並不具有自我相似性，自我相似就是說大小小都有看到相似的圖案，一個模特兒在那裡他本身並沒有自我相似性，所以你怎麼去找出他的規則出來，這個就是一個挑戰，可是會動腦筋的人他就會想辦法，我把他分割我剛才沒有講的很清楚，那比較技術了，他把他分割成譬如說一百格，可是每一格這裡頭可以找到它自我相似的部份，所以它就可以製造好像看起來沒有，可是他找出它可能有的接近於碎形的特性，然後它就可以把它變成規則把它儲存起來，這個就是它的應用那這個，就是要動腦筋的地方，因為沒有一個東西那麼直接碎形。

Q10 教授您好，其實您剛說碎形是把大自然中看似複雜，卻是有某種規律的幾何現象用一個有系統的方式來解釋，這是一個新的方法來詮釋整個過程，那我想請問您就是為什麼您會想研究這個？還有它最吸引你的地方在哪裡？謝謝。

A10 他詮釋的很好，比我講的還好，不過為什麼有興趣，我想大概是圖案吧，我對圖案本身就很有興趣，譬如說動態的圖案，動物在跑的腳的形狀等等，動態的圖案本身就是很吸引人的，對我來講，其實是被他的圖案吸引，就是說你可以用這麼簡單的一個式子，就可以製造一個這個繁複、這麼漂亮的圖案，我一開始想就想了解這個東西，他為什麼可以做得好，後來發現其實很簡單，你只要進去了你就會發現這是非常簡單的，那延伸出來還有很多應用，這不只是說玩遊戲而已，甚至我剛才提到的，在資訊業可以很重要的應用，甚至在經濟學的影響是深遠。在美國有一個叫 Clock 的人，有人問他碎形到底有什麼用，每個人都想知道他有什麼用，碎形可能很好玩很漂亮，不過他的回答我覺得很好，他說碎形就像一個出生的小孩，你說他有什麼用？可是他潛力無窮！

Q11 廖教授你好，我也是中興大學的，我要問的問題其實跟後面那位先生問的問題有點類似，就是你現在只是用理論用數學的方法造成說一個結果，你的圖案跟花豹是很像的，所以你寫了一篇論文然後去投稿，那你剛也說就是審查的委員也質疑說這個東西，就是由這個公式來的嗎？所以你可以刊登上去一定有一個驗證的結果，就是說有發現實際上豹紋真的經由這個過程來的？還是說你只是用推論的方式他就讓你刊登了？另外一個問題是，就是生物界當中有發現這種類似這種兩階段的過程嗎？謝謝。

Q11 如果你講的是實驗驗證，我是沒有做，因為也不可能去做花豹的實驗，不過驗證倒是，我們審查了很久，而審查的人不只一個，四個審查人都有意見，每個人的意見都不一樣，不過大家承認這是一個想法，這個想法能不能落實，你能不能把他做得出來，他們會要求你要做的更嚴謹一點，譬如說他們說你覺得豹紋很像，那你是不是可以比較技術的在向量空間做傅立葉變換，看他是不是很像，再做嚴謹一點。然後他講說他參數調整，生物真的可以這樣調整參數嗎？那在我們的回應，參數的調整過程就代表豹在長大，身體在長大就代表這個參數要變小並且可以做連續的變化，這比較接近生物的一點，類似像這樣，我們的回應都是這些，感覺上是貼近跟生物比較接近的，然後你的整個研究是比較嚴謹的，我們努力的大概都是這些，當然這前提是他要看你的過程是不是一個嚴謹的研究，而不是說你能不能做這個實驗。生物界是兩階段，其實這就這個想法就 1952 年涂林就提出來了，有一些科學家陸續都在發表這方面的文章，我們絕對不是首創，可是那兩階段是我們提出來的，因為他的想法就是，我方程式找對了我反應找對了，我參數調對了，然後你就模擬，你就看到最後的結果，看到斑馬或是瓢蟲，可是這樣的努力從 1952 年到現在將近五十多年，就是做不到花豹，伊索匹亞的指紋還沒有那麼複雜，可是就是做不出來，那我們透過兩階段的方式來做，我必須先產生點，然後點再做調整然後才會得到，所以這就是說我們比較創新的地方。那你說生物界有沒有其他的也需要兩階段，我相信是絕對有的只是我們並沒有在去做了，因為很容易想，你說你要得到一個圖案，你調整越多你的機會就越大，兩階段簡單的講就是把事情弄複雜，你可以這麼想，本來就是一階段簡單，誰不想一次把他做出來，可是經過幾十年就是做不到，所以我們必須把他弄成兩階段，兩階段絕對可以做更多圖案，只是你也可以把他三階段四階段，可是物理的研究如果把東西弄複雜大家釋不會想要的，大家都希望把東西越簡化越好，你用簡化理論解釋更多的東西是最好的，可是這樣的努力就是過去幾十年沒有成功，所以我們是不得以才用兩階段

- Q12 其實剛說驗證這個問題，其實花豹形成其實跟他本身的生理機制跟化學物質分泌還有基因調控有關係，最早你也講到一個基因的問題，然後你又說塗林機制就是擴散加上反應，所以反應可能是一種化學物質產生，如果能夠跟生物學家配合，譬如說我可以找到花豹在形成斑點就是一種分泌物質，然後你在斑點形成缺口環又是另一種分泌物質出現，也許可以拿來做研究的論證，形成這個時間點是一個，第二階段又是一個，這樣也許就能夠更說服別人，謝謝。
- A12 完全正確，世界大概有幾個地方有幾個實驗室，包括日本跟英國，他們就是要找到這個化學物質，但是現在就是還沒找到，因為現在都沒有任何線索，所以他們就是找不到，那我們也很希望他們找到，你就能支持這種想法，那這個實驗是需要努力的，可是需要有更多做化學、做生物的人，願意相信這套理論是對的，他們才會去做實驗，這一定是吃力不討好，那看起來是沒有多少人願意投入這個。
- Q13 我的問題可能比較奇怪一點，其實我自己對碎形的這個圖案也很有興趣，最讓我感興趣的是在如何在碎形的圖案中加入機率，因為碎形本身還是一種絕對論，如果在碎形的圖案加入一點機率，那就可以產生更多奇奇怪怪的圖案了。
- A13 是有啦，其實我剛才這一些畫和海岸線，其實就加了機率了，如果你規則決定了，圖案就決定結果了，可是在過程裡頭你可以讓他二選一的不一定要這個規則，這樣我們就把機率的觀念加進去了，圖案就更千變萬化，你給他幾條規則，然後他可以選擇不同的時候把機率加進去，那很顯然如果你真的要模擬自然，一定要有機率，因為自然絕對不是完全絕定性的，每一次都有不同的小變化，花豹每一隻看起來差不多，但是每一隻還都是不一樣，就是機率，所以每一次都會有一些小變化，所以機率是一定要加進去，才能反應真實的東西。